Dynamique

I. Torseur dynamique

I.1. Point matériel

I.1.1. Accélération

Soit M un point matériel de masse m et de vitesse $\vec{V}_M$ dans référentiel $\Re$

L'accélération de M par rapport au référentiel $\Re$ est notée :

$$\vec{\gamma}(M) = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\Big)_{\Re} = \frac{d\vec{V}_M}{dt}\Big)_{\Re}$$

I.1.2. Moment dynamique

Le moment dynamique de M par rapport au référentiel $\Re$ en point A est noté $\overrightarrow{\delta_A}\left(M/_{\Re}\right)$ son expression est :

$$\overrightarrow{\delta_A}\left(M/_{\Re}\right) = m\overrightarrow{AM} \wedge \vec{\gamma}\left(M/_{\Re}\right)$$

I.2. Solide indéformable

Dans le cas d'un solide indéformable en parlant de la quantité de l'accélération au lieu de l'accélération dans le cas d'un point matériel.

I.2.1. Quantité de l'accélération

La quantité de l'accélération d'un solide (S) indéformable est notée $\vec{D}\left(S/_{\Re}\right)$ son expression est :

$$\vec{D}\left(S/_{\Re}\right) = \iiint_V \vec{\gamma}\left(M/_{\Re}\right) dm$$

Où $\vec{\gamma}\left(M/_{\Re}\right)$ est l'accélération d'un point M de solide (S).

$$\vec{D}\left(S/\Re\right)=\iiint_V \vec{\gamma}\left(M/\Re\right)dm=\frac{d^2}{dt^2}\iiint_V \overrightarrow{OM}dm=\frac{d^2}{dt^2}\iiint_V \overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GM}dm=\frac{d^2}{dt^2}\iiint_V \overrightarrow{OG}dm+\frac{d^2}{dt^2}\iiint_V \overrightarrow{GM}dm$$

$$\vec{D}\left(S/\Re\right)=\frac{d^2}{dt^2}\iiint_V \overrightarrow{OG}dm=m\vec{\gamma}\left(G/\Re\right)$$

I.2.2. Moment dynamique

Le moment dynamique d'un solide (S) par rapport un référentiel $\Re$ à un point quelconque A est la grandeur vectorielle.

$$\overrightarrow{\delta_A}\left(S/\Re\right)=\iiint_V \overrightarrow{AM}\wedge\vec{\gamma}\left(M/\Re\right)dm$$

Soient A et B deux points d'espace

$$\overrightarrow{\delta_B}\left(S/\Re\right)=\overrightarrow{\delta_A}\left(S/\Re\right)+\vec{D}\left(S/R\right)\wedge\overrightarrow{AB}$$

En effet le champ des vecteurs du moment dynamique obéit à la propriété d'antisymétrique. Par conséquent, le champ des vecteurs du moment dynamique du système continu (S) est un champ antisymétrique, donc il est représentable par un torseur qui s'appelle torseur dynamique sa résultante est la quantité d'accélération du solide (S) $\vec{D}\left(S/R\right)$ et son moment résultant est $\vec{\delta}\left(S/\Re\right)$. Il est noté $[D]$ et ses éléments de réduction en un point A sont :

$$[D]_A=\begin{pmatrix}\vec{D}\left(S/\Re\right)\\ \vec{\delta}_A\left(S/\Re\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\iiint_V \vec{\gamma}_{(M/\Re)}dm\\ \iiint_V \overrightarrow{AM}\wedge\vec{\gamma}_{(M/\Re)}dm\end{pmatrix}$$

I.2.3. Théorème de Koenig pour le moment dynamique

Théorème de Koenig pour le moment dynamique est :

$$\vec{\delta}_A\left(S/\Re\right)=\vec{\delta}_G\left(S/\Re_G\right)+\vec{D}\left(S/\Re\right)\wedge\overrightarrow{GA}$$

I.2.4.Calcul du moment dynamique $\vec{\delta}_A\left(S/\Re\right)$ à partir de moment cinétique $\vec{\sigma}_A\left(S/\Re\right)$, A un point quelconque d'espace.

$$\begin{aligned}
\vec{\delta_A}\left(S/\Re\right) &= \iiint_V \overrightarrow{AM}\wedge\vec{\gamma}\left(M/\Re\right)dm \\
&= \iiint_V \overrightarrow{AM}\wedge\vec{\gamma}\left(M/\Re\right)dm \\
&= \iiint_V \overrightarrow{AM}\wedge\frac{d\vec{V}\left(M/\Re\right)}{dt}dm \\
&= \frac{d}{dt}\left(\iiint_V \overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}\left(M/\Re\right)dm\right)-\iiint_V \frac{d\left(\overrightarrow{AM}\right)}{dt}\wedge\vec{V}\left(M/\Re\right)dm \\
&= \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}_A\right)_\Re-\iiint_V \frac{d\left(\overrightarrow{AM}\right)}{dt}\wedge\vec{V}\left(M/\Re\right)dm \\
&= \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}_A\right)_\Re-\iiint_V \frac{d\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM}\right)}{dt}\wedge\vec{V}\left(M/\Re\right)dm \\
&= \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}_A\right)_\Re-\iiint_V \left(\vec{V}\left(M/\Re\right)-\vec{V}\left(A/\Re\right)\right)\wedge\vec{V}\left(M/\Re\right)dm \\
&= \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}_A\right)_\Re+\iiint_V \vec{V}\left(A/\Re\right)\wedge\vec{V}\left(M/\Re\right)dm \\
&= \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}_A\right)_\Re+\vec{V}\left(A/\Re\right)\wedge\iiint_V \vec{V}\left(M/\Re\right)dm \\
\vec{\delta_A}\left(S/\Re\right) &= \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}_A\right)_\Re+\vec{V}\left(A/\Re\right)\wedge m\vec{V}\left(G/\Re\right)
\end{aligned}$$

Enfin

$\vec{\delta_A}\left(S/\Re\right)=\frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}_A\right)_\Re+\vec{V}\left(A/\Re\right)\wedge m\vec{V}\left(G/\Re\right)$, A un point quelconque d'espace.

✓ Si A=G

$$\vec{\delta_G}\left(S/\Re\right)=\frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}_G\right)_\Re$$

✓ Si A est un point fixe $\vec{V}\left(A/\Re\right)=\vec{0}$

$$\overrightarrow{\delta_A}\left(A/\mathfrak{R}\right)=\frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}_A\right)_{\mathfrak{R}}$$